バナッハ空間における収縮射影法と非線形写像 (バナッハ空間論の研究とその周辺)

木村, 泰紀

数理解析研究所講究録
第 1753 巻 2011 年 40-46

バナッハ空間における収縮射影法と非線形写像

東邦大学・理学部　木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Faculty of Science, Toho University

1 はじめに

2008 年に Takahashi, Takeuchi, Kubota によって証明された, ヒルベルト空間における非拡大写像族の共通不動点近似法 [9] は, 後に収縮射影法と呼ばれ, バナッハ空間やアダマール空間など, さまざまな空間への拡張がなされ, さらに扱う写像についても quasinonexpansive 写像や relatively nonexpansive 写像等, 多くの非線形写像へ適用されている.

本稿では Kimura, Takahashi によって証明された, バナッハ空間上で定義された relatively nonexpansive 写像族の共通不動点近似定理 [5] に注目し, 計算誤差を考慮した点列生成法においても強収束性をもつことを示す.

2 準備

本稿であつかう空間はつねに実バナッハ空間である. バナッハ空間 E に対し, その共役空間を E^* であらわす.

回帰的バナッハ空間 E の空でない閉凸集合列 $\{C_n\}$ に対し, E の部分集合 $\text{s-Li}_n C_n$ は $\{C_n\}$ の強位相による極限点全体からなる集合である. すなわち, $x \in \text{s-Li}_n C_n$ であることは, ある点列 $\{x_n\} \subset E$ が存在して, $\{x_n\}$ は x に強収束し, かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in C_n$ をみたすことと同値である. 一方, $\text{w-Ls}_n C_n$ は $\{C_n\}$ の弱位相による部分点列極限点全体からなる集合, すなわち, $y \in \text{w-Ls}_n C_n$ であることが, ある点列 $\{y_i\}$ が存在して, $\{y_i\}$ が y に弱収束し, かつ $\{C_n\}$ のある部分列 $\{C_{n_i}\}$ に対して $y_i \in C_{n_i}$ が任意の $i \in \mathbb{N}$

Key words and phrases. Approximation, fixed point, nonexpansive mapping, shrinking projection method, metric projection, Mosco convergence.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09.

で成り立つことと同値である. E の閉凸集合 C_0 に対して $C_0 = \text{s-Li}_n C_n = \text{w-Ls}_n C_n$ が成り立つとき, $\{C_n\}$ は C_0 に Mosco 収束する [7] といい, $C_0 = \text{M-lim}_{n\to\infty} C_n$ とあらわす. Mosco 収束に関する諸性質の詳細は [1] を参照せよ.

集合値写像 $J : E \rightrightarrows E^*$ が $Jx = \{x^* \in E^* : \|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \|x^*\|^2\}$ と定義されるとき, J を双対写像という. E が回帰的かつ狭義凸で滑らかなバナッハ空間のとき, J は全単射な一価写像となる. さらにこのとき, E^* 上の双対写像 J^* が J の逆写像となることも定義から得られる. また, E が Fréchet 微分可能なノルムをもつときは, J はノルム位相で連続な写像となる. 詳細は [8] 等を参照せよ.

E の点列 $\{x_n\}$ が $x_0 \in E$ に弱収束し, かつ $\{\|x_n\|\}$ が $\|x_0\|$ に強収束するとしよう. このときつねに $\{x_n\}$ が x_0 に強収束することが導かれるならば, E は Kadec-Klee 条件をみたすという. E^* が Fréchet 微分可能なノルムをもつことと, E が Kadec-Klee 条件をみたし回帰的かつ狭義凸であることとは同値であることが知られている.

回帰的かつ狭義凸なバナッハ空間 E の空でない閉凸集合 C を考える. このとき任意の $x \in E$ に対し

$$\|x - p_x\| = \inf_{p \in C} \|x - p\|$$

をみたす点 $p_x \in C$ が唯一存在する. x にこの p_x を対応させる写像を C に関する距離射影といい, P_C であらわす.

E を回帰的かつ狭義凸で滑らかなバナッハ空間とし, $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を, $x, y \in E$ に対して

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で定義する. C を E の空でない閉凸集合とするとき, 写像 $S : C \to C$ が relatively nonexpansive [2, 3, 4, 6] であるとは, $F(S) = \hat{F}(S) \neq \emptyset$ であり, さらに任意の $z \in F(S)$ と $x \in C$ に対して $\phi(z, Sx) \leq \phi(z, x)$ が成り立つことをいう. ただし, $F(S)$, $\hat{F}(S)$ はそれぞれ S の不動点集合および漸近的不動点集合, すなわち

$$F(S) = \{z \in C : z = Sz\},$$
$$\hat{F}(S) = \{u \in C : \exists \{u_n\} \subset C, u_n \rightharpoonup u, \|u_n - Su_n\| \to 0\ (n \to \infty)\}$$

で定義される.

3 誤差を含んだ収縮射影法による不動点近似

本節では, 2009 年に得られたバナッハ空間での relatively nonexpansive 写像の族に対する共通不動点近似定理 [5] の手法に注目し, 点列生成の際に用いられる距離射影が正確

に求められない場合を考察する. そのような場合でも, 近似的に求める点が対応する閉凸集合に属しており, かつ誤差が 0 に収束するような場合においては, 生成された点列が共通不動点を近似することが得られる.

最初に, 定理の証明に必要な, Mosco 収束する閉凸集合列とそれに対応する距離射影列の収束に関する重要な結果を述べておく.

定理 3.1 (Tsukada [10]). E を回帰的かつ狭義凸なバナッハ空間で Kadec-Klee 条件をみたすものとし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸集合の列とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, P_{C_n} を E から C_n への距離射影とする. このとき, $\text{M-lim}_{n\to\infty} C_n = C_0$ が存在して空でないならば, 任意の $x \in E$ に対して $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x \in C$ に強収束する.

次に述べる本稿の主結果では, relatively nonexpansive 写像族の共通不動点を求める点列生成の手法である収縮射影法を用いて, 計算誤差を想定した場合の点列の収束を取り扱っている.

定理 3.2. E を回帰的で狭義凸なバナッハ空間とし, ノルムが Fréchet 微分可能で Kadec-Klee 条件をみたすとする. C を E の閉凸集合で, $\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C 上で定義された共通不動点をもつ relatively nonexpansive 写像の族とする. $\{\alpha_n\}$ を閉区間 $[0,1]$ の数列で $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたすものとし, $\{\rho_n\}$ を 0 に収束する正実数列とする. $x \in E$ を任意にとり, 点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する. $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
y_n(\lambda) &= J^*(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_\lambda x_n) \quad (\lambda \in \Lambda), \\
C_{n+1} &= \left\{ z \in C : \sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(z, y_n(\lambda)) \le \phi(z, x_n) \right\} \cap C_n, \\
x_{n+1} &\in B(P_{C_{n+1}}x, \rho_{n+1}) \cap C_{n+1}
\end{aligned}
$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ に強収束する. ただし $F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(S_\lambda)$, P_K は E の空でない閉凸集合 K への距離射影であり, $u \in E$, $\rho > 0$ に対して $B(u,\rho)$ は中心 u, 半径 ρ の閉球である.

定理の証明は本質的に Kimura, Takahashi [5] と同様の手法だが, 完全を期するため本稿においても証明を記しておく.

証明. 最初に, 点列 $\{x_n\}$ の定義が妥当であることを帰納法によって示そう. $F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(S_\lambda)$ とすると, C_1 は F を含む閉凸集合である. ここで, $n \in \mathbb{N}$ に対して $C_1, C_2, \ldots, C_n$ が F を含む閉凸集合であり, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が定義されているとしよう.

このとき, C_{n+1} の定義より

$$
\begin{aligned}
C_{n+1} &= \left\{ z \in C : \sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(z, y_n(\lambda)) \le \phi(z, x_n) \right\} \cap C_n \\
&= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{ z \in C : \phi(z, y_n(\lambda)) \le \phi(z, x_n) \} \cap C_n \\
&= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{ z \in C : 2 \langle z, Jx_n - Jy_n(\lambda) \rangle + \|y_n(\lambda)\|^2 - \|x_n\|^2 \le 0 \} \cap C_n
\end{aligned}
$$

が成り立つ. C_n は閉凸集合であるから C_{n+1} も閉凸集合となる. また, $u \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F(S_\lambda)$ をとると, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$
\begin{aligned}
\phi(u, y_n(\lambda)) &= \phi(u, J^*(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n) JS_\lambda x_n)) \\
&= \|u\|^2 - 2 \langle u, \alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n) JS_\lambda x_n \rangle \\
&\quad + \|\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n) JS_\lambda x_n\|^2 \\
&\le \alpha_n (\|u\|^2 - 2 \langle u, Jx_n \rangle + \|x_n\|^2) \\
&\quad + (1-\alpha_n)(\|u\|^2 - 2 \langle u, JS_\lambda x_n \rangle + \|S_\lambda x_n\|^2) \\
&= \alpha_n \phi(u, x_n) + (1-\alpha_n) \phi(u, S_\lambda x_n) \\
&\le \alpha_n \phi(u, x_n) + (1-\alpha_n) \phi(u, x_n) \\
&= \phi(u, x_n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって $\sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(u, y_n(\lambda)) \le \phi(u, x_n)$. 帰納法の仮定より $u \in C_n$ であるから, $u \in C_{n+1}$ が成り立ち, よって $F \subset C_{n+1}$ が得られる. 仮定より F は空でないので, C_{n+1} は空でない閉凸集合であり, $P_{C_{n+1}}$ が存在するので $P_{C_{n+1}} x$ も定義される. このとき $P_{C_{n+1}} x \in B(P_{C_{n+1}} x, \rho_n) \cap C_{n+1}$ であるから $B(P_{C_{n+1}} x, \rho_n) \cap C_{n+1}$ は空でない集合となり, x_{n+1} をとることができる. したがって $\{x_n\}$ の定義は妥当であることが示された.

定義より $\{C_n\}$ は E の空でない閉凸集合の列で, 包含関係に関して単調に減少しており, さらに $C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ が F を含むことから空でないことがわかる. よって

$$
\operatorname*{M-lim}_{n \to \infty} C_n = C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset
$$

が得られる. 定理 3.1 より, $\{P_{C_n} x\}$ は $x_0 = P_{C_0} x$ に強収束し, さらに

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| &\le \lim_{n \to \infty} \|x_n - P_{C_n} x\| + \lim_{n \to \infty} \|P_{C_n} x - x_0\| \\
&\le \lim_{n \to \infty} \rho_n + \lim_{n \to \infty} \|P_{C_n} x - x_0\| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より $\{x_n\}$ も x_0 に強収束する．ここで，x_0 は F に属することを示そう．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_0 \in C_n$ が成り立つことから，$\sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(x_0, y_n(\lambda)) \leq \phi(x_0, x_n)$ が得られる．$\lambda \in \Lambda$ を一つ固定すると，仮定より $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ であるから，$\mathbb{N}$ の部分列 $\{n_i\}$ で $\lim_{i\to\infty}\{\alpha_{n_i}\} = \alpha_0 < 1$ をみたし，かつ $\{Jy_{n_i}(\lambda)\}$ が $y_0^* \in E^*$ に弱収束するようなものが存在する．各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\phi(x_0, y_{n_i}(\lambda)) \leq \phi(x_0, x_{n_i})$ であるから

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \phi(x_0, y_{n_i}(\lambda)) \leq \lim_{i\to\infty} \phi(x_0, x_{n_i}) = 0$$

より $\lim_{i\to\infty} \phi(x_0, y_{n_i}(\lambda)) = 0$ である．また

$$(\|x_0\| - \|y_{n_i}(\lambda)\|)^2 = \|x_0\|^2 - 2\|x_0\|\|y_{n_i}(\lambda)\| + \|y_{n_i}(\lambda)\|^2 \leq \phi(x_0, y_{n_i}(\lambda))$$

より $\lim_{i\to\infty} \|y_{n_i}(\lambda)\| = \|x_0\|$ も得られ，

$$\lim_{i\to\infty} \langle x_0, Jy_{n_i}(\lambda)\rangle = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{2}(\|x_0\|^2 + \|y_{n_i}(\lambda)\|^2 - \phi(x_0, y_{n_i}(\lambda))) = \|x_0\|^2$$

が成り立つ．さらにノルムの弱下半連続性を用いると

$$\begin{aligned}
\|x_0\|^2 &= \lim_{i\to\infty} \langle x_0, Jy_{n_i}(\lambda)\rangle = \langle x_0, y_0^*\rangle \\
&\leq \|x_0\|\|y_0^*\| \\
&\leq \|x_0\| \liminf_{i\to\infty} \|Jy_{n_i}(\lambda)\| = \|x_0\| \lim_{i\to\infty} \|y_{n_i}(\lambda)\| \\
&= \|x_0\|^2
\end{aligned}$$

となり，$\|y_0^*\|^2 = \langle x_0, y_0^*\rangle = \|x_0\|^2$ を得る．よって $y_0^* = Jx_0$ であり，$\{Jy_{n_i}(\lambda)\}$ の弱極限は Jx_0 であることが示された．さらに

$$\lim_{i\to\infty} \|Jy_{n_i}(\lambda)\| = \lim_{i\to\infty} \|y_{n_i}(\lambda)\| = \|x_0\| = \|Jx_0\|$$

であることもわかる．ここで E のノルムの Fréchet 微分可能性から E^* が Kadec-Klee 条件をみたすことがわかるので，$\{Jy_{n_i}(\lambda)\}$ は Jx_0 に強収束する．よって $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\|Jx_0 - Jy_{n_i}(\lambda)\| &= \|Jx_0 - (\alpha_{n_i} Jx_{n_i} + (1 - \alpha_{n_i}) JS_\lambda x_{n_i})\| \\
&\geq \|Jx_0 - \alpha_{n_i} Jx_0 - (1 - \alpha_{n_i}) JS_\lambda x_{n_i}\| - \alpha_{n_i} \|Jx_{n_i} - Jx_0\| \\
&= (1 - \alpha_{n_i}) \|Jx_0 - JS_\lambda x_{n_i}\| - \alpha_{n_i} \|Jx_{n_i} - Jx_0\|
\end{aligned}$$

となり，J がノルム位相での連続性をみたすことを用いると

$$\lim_{i\to\infty} (1 - \alpha_{n_i}) \|Jx_0 - JS_\lambda x_{n_i}\| = (1 - \alpha_0) \lim_{i\to\infty} \|Jx_0 - JS_\lambda x_{n_i}\| = 0$$

が得られる. $\alpha_0 < 1$ なので $\lim_{i\to\infty} \|Jx_0 - JS_\lambda x_{n_i}\| = 0$ となり, $\{Jx_{n_i}\}$ は Jx_0 に強収束する. E が Kadec-Klee 条件をみたすことから J^* はノルム位相での連続性をもち,

$$\lim_{i\to\infty} \|x_0 - S_\lambda x_{n_i}\| = \lim_{i\to\infty} \|J^*Jx_0 - J^*JS_\lambda x_{n_i}\| = 0$$

を得る. よって $x_0 \in \hat{F}(S_\lambda) = F(S_\lambda)$ が任意の $\lambda \in \Lambda$ で成り立つので $x_0 \in F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F(S_\lambda)$ が得られた. $x_0 = P_{C_0}x \in F$ であり, F は $C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ の閉凸集合なので

$$x_0 = P_F x$$

が示された. □

漸化式によって近似点列を定義する手法において, 計算の仮定で生じる誤差は多くの場合において累積していく. つまり, 各段階における計算誤差の列を $\{\epsilon_n\}$ としたとき, たとえ $\{\epsilon_n\}$ 自体が 0 に収束したとしても, その累積である $\{\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k\}$ が発散すると点列自体の収束性も保証されない場合が多い. 本節の結果は, 収縮射影法における距離射影の計算誤差については, 誤差を含んだ点列が対応する閉凸集合に属するようにとれるかぎり, 誤差の累積を考慮する必要はないということを示している.

参考文献

[1] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[2] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[3] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Weak convergence of orbits of nonlinear operators in reflexive Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **24** (2003), 489–508.

[4] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[5] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[6] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[7] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.

[8] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[9] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[10] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.